ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο χώρος $F(A,\mathbb{R})$ εφοδιασμένος με την ρ_u είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Αποδειξη

Για να δείξω ότι $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ είναι πλήρης, αρκεί νδο. κάθε βασική ακολουθία είναι ρ_u-συγκλίνουσα. Εστω (f_n) μια βασική ακολουθία. Θδο το όριο της (f_n) υπάρχει στο $F(A,\mathbb{R})$. Εφόσον (f_n) είναι βασική έπεται $(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $\rho_u(f_n, f_m)<\varepsilon$ $\forall n,m \geq n_0$ ή ισοδύναμα $(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$, $\forall n,m \geq n_0$ ή

ισοδύναμα $(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$:
$\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$, $\forall n,m \geq n_0$ ή ισοδύναμα $(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ $\forall n,m\geq n_0$ $\forall x\in A$ (1)

Επομένως, για $x\in A$ η $(f_n(x))_n$ είναι βασική ακολουθία στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, επομένως είναι και συγκλίνουσα.

Τα παραπάνω ισχύουν για όλα τα $x\in A$, οπότε ορίζεται μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ τω. $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$, δηλαδή $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο A. Οπότε από την (1) για $m\geq n_0$

$|f_m(x)-f(x)| = \lim\limits_n |f_m(x)-f_n(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x\in A$

Τα παραπάνω ισχύουν για τυχόν $\varepsilon>0$ με $\varepsilon<1$, οπότε

$(\forall \varepsilon>0)(\varepsilon<1)(\exists m_0=m_0(\varepsilon))(\forall m\geq m_0) \Rightarrow |f_m(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ $\forall x\in A$

άρα $(\forall\varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists m_0\in\mathbb{N})(\forall m\geq m_0) \Rightarrow \sup\limits_{x\in A}|f_m(x)-f(x)|\leq\varepsilon$

Άρα $(\forall\varepsilon>0$ με $\varepsilon<1)(\exists m_0\in\mathbb{N})$: $m\geq m_0 \Rightarrow$
$\rho_u(f_m, f)\leq\varepsilon$. Άρα $f_m \xrightarrow{\rho_u} f$

ΑΣΚΗΣΗ

Εστω A πεπερασμένο σύνολο και $f_n: A\to\mathbb{R}$ και $f: A\to\mathbb{R}$
Νδο η κ.σ. σύγκλιση στο A ταυτίζεται με την ομοιόμορφη

σύγκλιση στο σύνολο A

Έστω $A=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ στο A. Έστω, επίσης, $\varepsilon>0$ και για $x\in A$ $N_\varepsilon(x)=\min\{m_0 : n\geq m_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$ εάν $K=\max\{N_\varepsilon(x_i) : i=1,\dots,m\}$. Τότε $N_\varepsilon(x)\leq K$, $\forall x\in A$, άρα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο A. (Το αντίστροφο ισχύει πάντα)

ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A\subseteq \mathbb{R}^n$ και $f: A\to\mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι φραγμένη εάν $\exists M>0$ τ.ω. $|f(x)|\leq M$ $\forall x\in A$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: Το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με: $B(A,\mathbb{R})$

▷ $B(A,\mathbb{R})\subseteq F(A,\mathbb{R})$

▷ Ο περιορισμός της ρ_u στο $B(A,\mathbb{R})$ ορίζει μια μετρική στο $B(A,\mathbb{R})$ και η σύγκλιση ως προς $\rho_u|_{B(A,\mathbb{R})}$ (ισχετική μετρική) εισάγει στο $B(A,\mathbb{R})$ την ομοιόμορφη σύγκλιση.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ο $B(A,\mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(F(A,\mathbb{R}),\rho_u)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $(f_n)\subseteq B(A,\mathbb{R})$ τ.ω. $f_n \xrightarrow{\rho_u} f$, όπου $f\in F(A,\mathbb{R})$. Εφόσον $f_n\xrightarrow{\rho_u} f$ έπεται ότι η $f_n\to f$ ομ/φα στο A. Άρα παίρνοντας $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\rho_u(f_{n_0},f)<\frac{1}{2}$ $\forall n\geq n_0$ ή

$\sup_{x\in A} |f_{n_0}(x) - f(x)| \le \frac{1}{2}$ ή $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ $\forall x \in A$.

Η $f(n_0)$ είναι φραγμένη άρα $\exists M > 0$ τ.ω. $|f_{n_0}(x)| \le M$ $\forall x \in A$.
Οπότε, $|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \le |f_{n_0}(x) - f(x)| +$
$+ |f_{n_0}(x)| \le \frac{1}{2} + M$ $\forall x \in A$

Άρα f φραγμένη δηλ. $f \in B(A, \mathbb{R})$

Κριτήριο Ομοιόμορφης Συνέχειας

Εάν $f_n \xrightarrow{κσ} f$ στο A και (f_n) είναι ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων και f όχι φραγμένη, τότε η σύγκλιση ΔΕΝ είναι ομοιόμορφη

Άσκηση

Να εξετάσετε εάν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα, όπου

$f_n(x) = e^{\min\{n, x\}}$, $x \ge 0$

Έστω $x \in A = [0, +\infty)$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x < n_0$. Οπότε ισχύει $f_n(x) = e^{\min\{n, x\}} = e^x$, $\forall n \ge n_0$.

Επομένως εάν $f(x) = e^x$, $x \in [0, +\infty)$, τότε η $f_n \xrightarrow{κσ} f$ στο $[0, +\infty)$. Αλλά, για $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

- για $x \le n$ $|f_n(x)| \le |e^{\min\{n, x\}}| = e^x \le e^n$
- για $x > n$ $|f_n(x) = e^{\min\{n, x\}}| = e^n$

Επομένως $|f_n(x)| \le e^n$ $\forall x \in [0, +\infty)$.
Άρα, η (f_n) είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$. Όμως, η $f(x) = e^x$, $x \in [0, +\infty)$ δεν είναι φραγμένη.

άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο A.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f, g \in B(A,\mathbb{R})$, τότε $\forall x \in A$ ισχύει $|f(x)-g(x)| \leq$
$\leq |f(x)+g(x)| \leq M_1 + M_2$. Άρα $\sup_{x\in A} |f(x)-g(x)| < +\infty$.

Ορίζουμε μια συνάρτηση $\hat{\rho}_u$ ως εξής:

$\hat{\rho}_u : B(A,\mathbb{R}) \times B(A,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ και $\hat{\rho}_u(f,g) = \sup_{x\in A} |f(x)-g(x)|$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $\hat{\rho}_u$ είναι μια μετρική στο $B(A,\mathbb{R})$ διότι:

i) $\hat{\rho}_u(f,g) \geq 0$

ii) $\hat{\rho}_u(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$

iii) $\hat{\rho}_u(f,g) = \hat{\rho}_u(g,f)$

iv) $\hat{\rho}_u(f,g) \leq \hat{\rho}_u(f,u) + \hat{\rho}_u(u,g)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορίζουμε την εξής συνάρτηση: $\|\cdot\| : B(A,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
$\|f\| = \hat{\rho}_u(f,0) = \sup_{x\in A} |f(x)|$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $\|\cdot\|$ είναι μια στάθμη (νόρμα) στον $B(A,\mathbb{R})$ διότι:

i) $\|f\| \geq 0 \ \forall f \in B(A,\mathbb{R})$

ii) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ στο A

iii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|, \ \forall \lambda, \forall f \in B(A,\mathbb{R})$

iv) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Άρα η $\hat{\rho}_u$ παράγει στάθμη στον $B(A,\mathbb{R})$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι μετρικές $\rho_u|_{B(A,\mathbb{R})}$ και $\hat{\rho}_u$ είναι ισοδύναμες στον $B(A,\mathbb{R})$ (δηλαδή μια ακολουθία (f_n) συγκλίνει ως προς την $\rho_u|_{B(A,\mathbb{R})}$ αν-ν συγκλίνει ως προς την $\hat{\rho}_u$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $(f_n) \subseteq B(A,\mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{\rho_u} f$, τότε $\rho_u(f_n, f) \to 0 \Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$ $\min\{1, \sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|\}<\varepsilon$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)$ με $\varepsilon<1$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)$

$\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow \hat{\rho}_u(f_n, f) \to 0$

Άρα $\rho_u|_{B(A,\mathbb{R})}$ και $\hat{\rho}_u$ ισοδύναμες.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ο χώρος $(B(A,\mathbb{R}), \hat{\rho}_u)$ είναι πλήρης μ.χ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί νδο κάθε $\hat{\rho}_u$-βασική ακολουθία είναι $\hat{\rho}_u$-συγκλίνουσα. Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $(B(A,\mathbb{R}), \hat{\rho}_u)$. Τότε εάν $(\varepsilon>0$ με $\varepsilon<1)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$:

$\hat{\rho}_u(f_n, f_m)<\varepsilon<1$, $\forall n,m \geq n_0$, δηλαδή

$\sup_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon<1$ $\forall n,m \geq n_0$, άρα $\rho_u(f_n, f_m) =$

$= \min\{1, \sup_{x\in A}|f_n(x)-f_m(x)|\} < \varepsilon < 1$ $\forall n,m \geq n_0$

Άρα (f_n) είναι ρ_u-βασική, άρα και συγκλίνουσα ως προς την ρ_u στον $B(A,\mathbb{R})$, δηλ. $\exists f \in B(A,\mathbb{R})$ τ.ω. $\rho_u(f_n, f) \to 0$, αλλά ρ_u και $\hat{\rho}_u$ ισοδύναμες, επομένως $\hat{\rho}_u(f_n, f) \to 0$. Άρα η (f_n) είναι $\hat{\rho}_u$ συγκλίνουσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Ο χώρος $B(A,\mathbb{R})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $F(A,\mathbb{R})$ διότι εάν $f \in B(A,\mathbb{R})$ τότε $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $|\lambda f(x)| = |\lambda|\,|f(x)| \leq |\lambda| \cdot M = M'$, $\forall x \in A$.
Επίσης, εάν $f, g \in B(A,\mathbb{R})$ τότε $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| = M_1 + M_2 = M'$ $\forall x \in A$.
Άρα το άθροισμα των τιμών των συναρτήσεων f, g είναι φραγμένο.

2) Εάν $U(A,\mathbb{R}) = F(A,\mathbb{R}) - B(A,\mathbb{R})$, δηλ. $U(A,\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των μη φραγμένων συναρτήσεων $f: A \to \mathbb{R}$.
Ο $U(A,\mathbb{R})$ ΔΕΝ είναι γραμμικός υπόχωρος του $F(A,\mathbb{R})$ διότι αν π.χ. $f \in U(A,\mathbb{R})$ τότε $(-f) \in U(A,\mathbb{R})$ αλλά $f + (-f) = 0$ και η μηδενική συνάρτηση είναι φραγμένη συνάρτηση.
Εφόσον $U(A,\mathbb{R}) \subseteq (F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ άρα ο περιορισμός της ρ_u στον $U(A,\mathbb{R})$ καθιστά τον $U(A,\mathbb{R})$ μετρικό υπόχωρο του $F(A,\mathbb{R})$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ο $\left(U(A,\mathbb{R}), \rho_u\big|_{U(A,\mathbb{R})}\right)$ είναι ένας κλειστός μετρικός υπόχωρος του $F(A,\mathbb{R})$

Απόδειξη

Έστω $(f_n) \subseteq U(A,\mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{\rho_u} f$, όπου $F(A,\mathbb{R})$. Θέλουμε ν.δ.ο. $f \in U(A,\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει, δηλ. $f \in B(A,\mathbb{R})$. Τότε $\exists M > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in A$ (1)

Εφόσον, $f_n \xrightarrow{\rho_u} f$ έπεται ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\rho_u(f_n, f) < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq n_0$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}, \forall n \geq n_0$$

$|f_n(x) - f(x)| < 1/2$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in A$ (2)

Άρα και $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in A$ (3)

Άρα $(\forall x \in A)$ $|f_{n_0}(x)| = |f_{n_0}(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \frac{1}{2} + M$, δηλαδή f_{n_0} φραγμένη συνάρτηση

(Άτοπο!) Άρα $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Εάν (f_n) ακολουθία μη φραγμένων συναρτήσεων και $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$ στο σύνολο A και f είναι φραγμένη τότε η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

ΑΣΚΗΣΗ

Να εξετάσετε, εάν η ακολουθία $f_n(x) = \frac{1}{n \cdot x}$, $x > 0$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{nx} = +\infty$

Άρα (f_n) είναι μια ακολουθία μη φραγμένων συναρτήσεων.

Για $x > 0$ έχουμε $\lim_n f_n(x) = \lim_n \frac{1}{nx} = 0$.

Οπότε εάν $f(x) = 0$, $x > 0$ f είναι φραγμένη. Επομένως, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Παρατήρηση

Το σύνολο $B(A,\mathbb{R})$ και $U(A,\mathbb{R})$ είναι $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$. Επίσης, $F(A,\mathbb{R}) = B(A,\mathbb{R}) \cup U(A,\mathbb{R})$ και $B(A,\mathbb{R}) = U(A,\mathbb{R})^c$ και $U(A,\mathbb{R}) = B(A,\mathbb{R})^c$, άρα τα $B(A,\mathbb{R})$ και $U(A,\mathbb{R})$ είναι και ανοιχτά του $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$.
Άρα ο $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ δεν είναι συνεκτικός.

Πόρισμα

Ο $(U(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος διότι $U(A,\mathbb{R})$ είναι ρ_u-κλειστό του $F(A,\mathbb{R})$ και $(F(A,\mathbb{R}), \rho_u)$ είναι πλήρης.

Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = n + \frac{1}{x} - \left|n - \frac{1}{x}\right|$, $x \in [0,1]$

$n - \frac{1}{x} = 0 \iff n = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{n}$

- για $x \in (0, \frac{1}{n})$, $x = \frac{1}{n}$ (*) και $\left|n - \frac{1}{x}\right| = -\left(n - \frac{1}{x}\right)$

$f_n(x) = n + \frac{1}{x} + n - \frac{1}{x} = 2n \overset{(*)}{<} \frac{1}{x}$

- για $x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, τότε $x > \frac{1}{2n}$ (και $n > 1/x$)

$f_n(x) = n + \frac{1}{x} - n + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} < 2n$

Άρα $\forall x \in (0,1]$ ισχύει $|f_n(x)| \le 2n$.
Άρα (f_n) είναι μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων στο $(0,1]$

- Εάν $x \in [0,1]$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n_0} < x$.

(ισχύει επίσης ότι και $\frac{1}{n} < x$ $\forall n \ge n_0$) Επομένως, για

$n \geq n_0$. $f_n(x) = n + \frac{1}{x} - \left(n - \frac{1}{x}\right) = n + \frac{1}{x} - n + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

Άρα $\lim_{n} f(x) = \frac{2}{x}$ $\forall x \in [0, 1]$

▷ Εάν $f(x) = \frac{2}{x}$, τότε $f_n \xrightarrow{κσ} f$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Άτοπο, η f δεν φραγμένη.

ΑΣΚΗΣΗ H.W.

Ελέγξτε αν η $\hat{P}_{\mu}$ παράγει σταθερά

στον $F(A, \mathbb{R})$